Fonctions dérivées

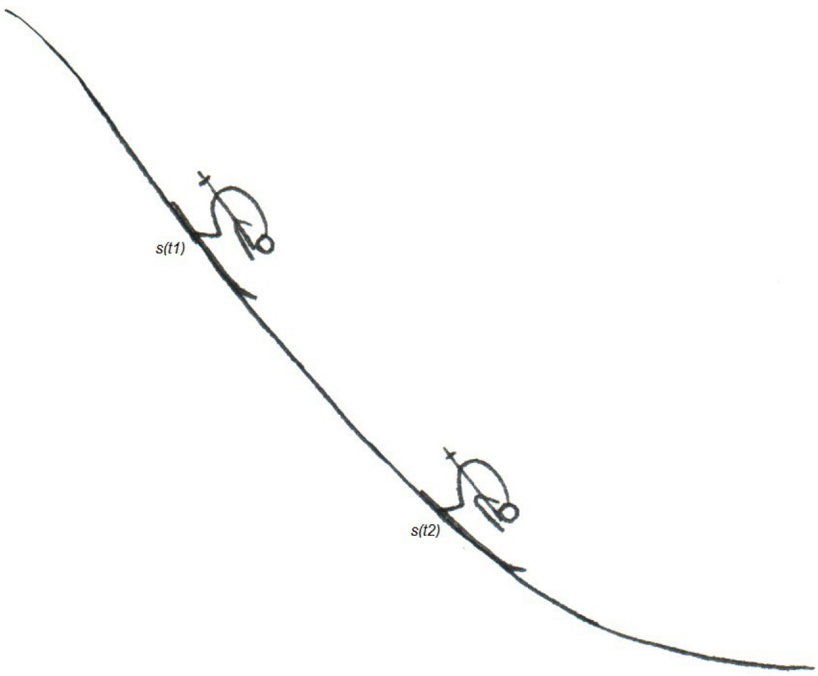
Objectifs :
- Définir la fonction dérivée
- Connaître les fonctions dérivées des fonctions usuelles
- Savoir utiliser les formules donnant la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient
- Étudier les dérivées de fonctions plus composées à l'aide de ces formules

1. Fonction dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable en tout a d'un intervalle I.
L'hypothèse "dérivable" signifie que pour $a \in I$, $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe.
On a appelé cette limite « nombre dérivé de f en a » au chapitre **??** et on l'a noté $f'(a)$.

Définition 9.1 Soit f une fonction dérivable en tout x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* de f sur I. On la note f'.

Exemple : Si l'on considère la fonction "position", notée $t \mapsto s(t)$ (on considère dans ce cas une "abscisse curviligne"), qui à un instant t associe la position d'un solide sur sa trajectoire, alors :
- la fonction dérivée de $s(t)$ correspond à la vitesse du solide, on la note donc $v(t)$ au lieu de $s'(t)$
- on peut même chercher la fonction dérivée de $v(t)$, celle-ci correspond à l'accélération du solide, et on la note $a(t)$ plutôt que $v'(t)$ ou que $s''(t)$.



2. Dérivées des fonctions usuelles

A. Fonction constante

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto k$, pour $x \in \mathbb{R}$. pour $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

Propriété 9.1 La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

B. La fonction $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$

Propriété 9.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = nx^{n-1}$.

Démonstration *Idée de la démonstration* :
Soit $x \in \mathbb{R}$ et h un réel non nul. Calculons le quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. On a d'abord $f(x+h) = (x+h)^n$. En développant cette expression on va obtenir des termes en x^n, en $x^{n-1} \times h$, en $x^{n-2} \times h^2$, ... et en h^n. En observant attentivement la manière de développer le produit $(x+h)(x+h)\dots(x+h)$, on remarque que le terme x^n apparaîtra une seule fois et le terme $x^{n-1} \times h$ apparaîtra n fois. On a donc :

$$(x+h)^n = x^n + n \times x^{n-1}h + \dots x^{n-2}h^2 + \dots + h^n$$

Donc :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{n \times x^{n-1}h + \dots x^{n-2}h^2 + \dots + h^n}{h} = nx^{n-1} + hQ(x,h)$$

avec $Q(x,h)$ une expression polynomiale dépendant de x et de h : sa limite lorsque h tend vers 0 existe donc. Ainsi, on obtient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x\to 0} \left(nx^{n-1} + hQ(x,h)\right) = nx^{n-1}$$

Remarque : On a donc les résultats suivants :
- si $f(x) = x$ alors pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 1$;
- si $f(x) = x^2$ alors pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x$;
- si $f(x) = x^3$ alors pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 3x^2$;
- ....

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}$ est $f'(1)$. Pour calculer $f'(1)$ on peut utiliser deux méthodes :
- la définition du nombre dérivé : c'est la limite lorsque h tend vers 0 du quotient $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$;
- ou, et c'est plus rapide, la fonction dérivée de f : on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$; donc $f'(1) = 3 \times 1^2 = 3$.

De plus, on a $f(1) = 1^3 = 1$. L'équation de T_1 est donc : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit $y = 3(x-1)+1$ ou encore, en réduisant : $T_1 : y = 3x - 2$.

C. Fonction inverse

Propriété 9.3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration Pour $x \neq 0$ et $h \neq 0$ tels que $x + h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

On a donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{x(x+h)}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

Exemple : Soit f la fonction inverse : pour $x\neq 0$, $f(x)=\frac{1}{x}$. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Cette tangente T_1 a pour équation $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.
Pour la déterminer nous avons besoin de $f'(1)$ et de $f(1)=\frac{1}{1}=1$.
On a pour tout $x\neq 0$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ donc $f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1$.
Ainsi T_1 a pour équation $y=-1\times(x-1)+1$ soit $T_1 : y=-x+2$.

D. Fonction racine carrée

Propriété 9.4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Attention : f n'est pas dérivable en 0

Démonstration Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $h\in\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\sqrt{x+h}^2-\sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

On a donc :

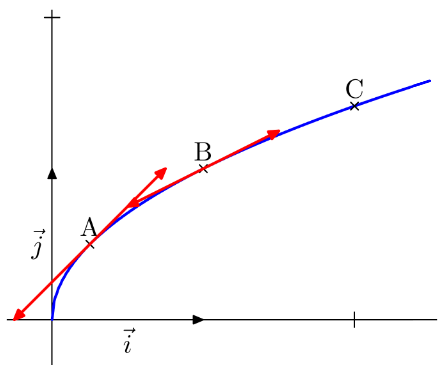
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Si $x=0$, pour $h>0$, on a $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$. Ainsi, lorsque h tend vers 0, $\sqrt{h}$ aussi donc $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes. Donc la limite lorsque h tend vers 0 du quotient $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'existe pas : la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Application au tracé de la courbe :
Pour tracer la courbe représentant la fonction racine carrée on dresse un tableau de valeurs et pour chaque point de ce tableau on calcule le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point, puis on détermine l'équation de la tangente :

a	$\frac{1}{4}$	1	2
$f(a)$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$
$f'(a)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

- en $a=\frac{1}{4}$, l'équation de la tangente est : $y=1\times(x-\frac{1}{4})+\frac{1}{2}$ soit $y=x+\frac{1}{4}$;
- en $a=1$, l'équation de la tangente est : $y=\frac{1}{2}(x-1)+1$ soit $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$;
- en $a=2$, l'équation de la tangente est : $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)+\sqrt{2}$ soit $y=\frac{x\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$.



3. Opérations sur les fonctions dérivables

A. Dérivée d'une somme

Propriété 9.5 Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
On note f la fonction définie sur I par $f(x) = u(x) + v(x)$ (on note aussi $f = u + v$ sur I).
Alors la fonction f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. On note $f' = u' + v'$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + 3$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 + 2x$

B. Produit par un réel

Propriété 9.6 Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I, et λ un réel quelconque.
On note f la fonction définie sur I par $f(x) = \lambda u(x)$ (on note $f = \lambda u$ sur I).
Alors la fonction f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = \lambda u'(x)$. On note $f' = \lambda u'$.

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2$, et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 2x$.
Alors, $f'(x) = 2 \times 2x$ et $g'(x) = 4 \times 3x^2 - 2$.

Conséquence :
Les fonctions polynômes sont donc dérivables sur leur ensemble de définition.

C. Dérivée d'un produit

Propriété 9.7 Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = u(x)v(x)$.
Alors, f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. On note $f' = u'v + uv'$.

Démonstration (*Idée de la démonstration*) Pour $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h).v(a+h) - u(a).v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h).v(a+h) - u(a).v(a+h) + u(a).v(a+h) - u(a).v(a)}{h} \\
&= v(a+h) \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}
\end{aligned}$$

Or on a $\lim\limits_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$,
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$,
et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$.
En admettant que (sous certaines conditions remplies ici) la limite d'un produit est le produit des limites (et de même pour la somme) on obtient donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = v(a) \times u'(a) + u(a) \times v'(a)$$

Ceci est vrai pour tout $a \in I$ donc sur I on a $f' = u'v + uv'$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^3\sqrt{x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables : f s'écrit $u \times v$ avec $\left\{ \begin{array}{l} u(x) = x^3 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{array} \right.$, où u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a donc : $\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right.$.
Avec ces notations, on a $f' = u'v + uv'$ donc :

$$\text{Pour } x > 0,\ f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (3x^2)\sqrt{x} + x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}.$$

En simplifiant, on obtient même :

$$f'(x) = 3x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^3 \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$$

Remarque : Dans le cas de cet exemple, la propriété **??** permet d'affirmer que f est dérivable sur $\mathbb{R}*_+$, mais elle ne permet pas de conclure sur la dérivabilité de f en 0.
Pour cela, revenons à la définition du nombre dérivé : f est dérivable en 0 si le quotient $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ admet une limite réelle lorsque $h \to 0$. On a :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^3\sqrt{h}}{h} = h^2\sqrt{h}$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^2\sqrt{h} = 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Propriété 9.8 (Conséquence) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = (u(x))^2$.
Alors la fonction f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = 2 \times u(x) \times u'(x)$. On écrit :

$$\left(u^2\right)' = 2uu'$$

D. Dérivée d'un quotient

Propriété 9.9 Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, avec $v(x) \neq 0$ pour $x \in I$.
Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.
Alors, f est dérivable sur I et pour $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$. On note $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Démonstration (*Idée de la démonstration*) Pour $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$ on a :

$$\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) &= \frac{u(a+h)}{v(a+h)} - \frac{u(a)}{v(a)} \\
&= \frac{u(a+h).v(a) - u(a).v(a+h)}{v(a+h).v(a)} \\
&= \frac{u(a+h).v(a) - u(a).v(a) + u(a).v(a) - u(a).v(a+h)}{v(a+h).v(a)} \\
&= \frac{1}{v(a+h).v(a)} \times (v(a) \times (u(a+h) - u(a)) + u(a) \times (v(a) - v(a+h)))
\end{aligned}$$

On divise le tout par h, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{1}{v(a+h).v(a)} \times \frac{v(a) \times (u(a+h) - u(a)) + u(a) \times (v(a) - v(a+h))}{h} \\
&= \frac{1}{v(a+h).v(a)} \times \left(v(a) \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + u(a) \times \frac{v(a) - v(a+h)}{h} \right)
\end{aligned}$$

Or on a $\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$,

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$,
et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$.
En admettant que (sous certaines conditions remplies ici) la limite d'un produit est le produit des limites (et de même pour la somme et le quotient) on obtient donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{v(a)\times u'(a) - u(a)\times v'(a)}{(v(a))^2}$$

Ceci est vrai pour tout $a \in I$ donc sur I on a $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+3}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas : on a $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x-4 \\ v(x) = x^2+3 \end{cases}$.
On a donc : $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$. Et ainsi, $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. Donc :

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{3\times(x^2+3)-(3x-4)\times(2x)}{x^2+3^2} = \frac{-3x^2+8x+9}{x^2+3^2}$$

Conséquence :
Les fonctions rationnelles (quotients de deux polynômes) sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Propriété 9.10 (Conséquence) Soit u une fonction définie, dérivable et qui ne s'annule pas sur un intervalle I.
Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{1}{u(x)}$.
Alors f est dérivable sur I et pour $x \in I$ on a $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$. On écrit :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

4. Formulaire

Dans la suite de ce formulaire, k est un réel quelconque fixé et n est un entier naturel non nul.

Fonction f	Dérivée f'	Ensemble de dérivabilité de f
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$

Quelques rappels :
- si u et v sont dérivables sur I, alors $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u'+v'$;
- si f est dérivable sur I, alors, kf est dérivable sur I, et $(kf)' = kf'$;
- si u et v sont dérivables sur I, alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v+uv'$;
- si u et v sont dérivables sur I, avec pour $x \in I, v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.